

Построение ММ статики технологических объектов

При исследовании статики технологических объектов наиболее часто встречаются объекты со следующими типами структурных схем (рис. 2.1): O_1 — с одной входной x и одной выходной y переменными; O_2 — с двумя входными x_1 и x_2 и выходной y переменными; O_m — с m линейно независимыми входными x_1, x_2, \dots, x_m и выходной y переменными. Во многих случаях при проведении эксперимента переменная y измеряется с некоторой погрешностью $\tilde{y} = y + z$, где z — случайный стационарный процесс с нулевым средним и дисперсией σ_z^2 . Структурные схемы для таких случаев будем обозначать O_1, O_2, O_m , и O_1^z .

Математические модели статики объекта со структурными схемами O_1, O_2, O_m и O_1^z имеют вид:

$$y = f_1(x); y = f_2(x_1, x_2); y = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m); M\{\tilde{y} | x\} = f(x),$$

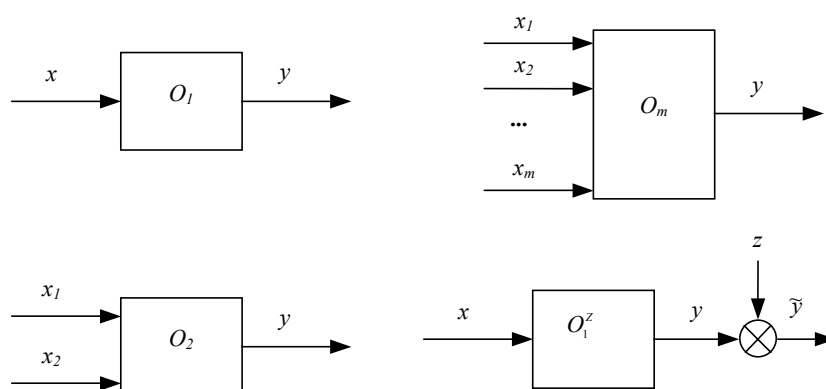


Рис. 2.1 – Структурные схемы технологических объектов

Построение модели статики объекта O_1

А) Подготовка и планирование эксперимента.

На этом этапе изучается объект, составляется его структурная схема, экспериментальная установка оборудуется приборами для контроля (регистрации) переменных x и y . Определяется диапазон $[x, \bar{x}]$ возможных изменений входной переменной x , оценивается время $T_0 = t_2 - t_1$ окончания переходного процесса $y(t)$, вызванного ступенчатым возмущением $x(t)$ в момент времени t_1 . Здесь t_2 — момент времени, когда $\dot{y}(t)$ становится приблизительно равной нулю.

Планирование эксперимента сводится к выбору числа опытов $d = \frac{\bar{x} - x}{\Delta x}$, $\Delta x = const$, (обычно $d \geq 5 \div 10$) и оценке времени эксперимента $T_3 \geq d \cdot \Delta t$, где $\Delta t \geq (1 \div 1,5) \cdot T_0$.

Б) Проведение эксперимента.

Экспериментатор устанавливает $x(t) = \underline{x} = x(1)$ и спустя время Δt регистрирует значение выходной переменной $y(1)$. Затем устанавливается значение входной переменной $x(2) = x(1) + \Delta x$, измеряется $y(2)$ и т.д.. В конце эксперимента получаем таблицу $x(j), y(j), j = 1, 2, \dots, d$

В) Обработка результатов эксперимента

На этом этапе производится статистическая обработка опытных данных и собственно построение математической модели статики технологического объекта (статической

характеристики). Статическая характеристика объекта $y = f(x)$ используется для оптимизации объекта и расчёта линейных систем автоматического регулирования.

Иногда из каких-то дополнительных соображений известно, что приближающую функцию целесообразно искать в виде

$$y \approx f(x, a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Если параметры a_1, a_2, \dots, a_n определяются из условия совпадения $y(j)$ и приближающей функции $f(x_j)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n , так называемых узлах интерполяции:

$$y(j) = f(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n); j = 1, \dots, n,$$

то такой способ приближения называют интерполяцией или интерполированием.

Пусть \underline{x} — наименьшее из чисел x_i — узлов интерполяции, а \bar{x} — наибольшее из них. Если точка x , в которой вычисляется значение $f(x)$, лежит вне отрезка $[\underline{x}, \bar{x}]$, то наряду с термином интерполяция употребляют термин экстраполяция.

Наиболее часто используется интерполяция многочленами. Однако это не единственный возможный вид интерполяции. Иногда удобнее приближать функции тригонометрическими функциями, в других задачах целесообразно приближать многочленом не $f(x)$, а $\ln[f(x)]$, или приближать $f(x)$ не многочленом от x , а многочленом от $\ln|x|$ [8, 9].

Интерполирование многочленами Лагранжа или Ньютона [8, 9] на всем отрезке $[a, b]$ с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется накоплением погрешностей в процессе вычислений. Для того, чтобы избежать больших погрешностей в процессе вычислений весь отрезок $[\underline{x}, \bar{x}]$ разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом невысокой степени (так называемая кусочно-полиномиальная интерполяция).

Одним из таких способов интерполирования на всем отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций (сплайнов). Пусть на $[\underline{x}, \bar{x}]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем сетку $\underline{x} = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \bar{x}$ и обозначим $y(j) = f(x_j); j = \overline{0, n}$.

Сплайном соответствующей функции $f(x)$ к данным узлам $\{x_j\}_{j=0}^{j=n}$ называется функция $S_p(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) на каждом сегменте $[x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, \dots, n$, функция $S_p(x)$ является многочленом третьей степени;

б) функция $S_p(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывна на $[\underline{x}, \bar{x}]$;

в) $S_p(x_j) = f(x_j) = y(j), j = \overline{0, n}$.

Сплайн, определяемый условиями а) ÷ в) называется также интерполяционным кубическим сплайном.

На каждом из отрезков $[x_{j-1}, x_j], j = 2, 3, \dots, n$, будем искать функцию $S_p(x) = S_{p_j}(x)$ в виде многочлена третьей степени

$$S_{p_j}(x) = a_j + b_j(x - x_j) + \frac{c_j}{2}(x - x_j)^2 + \frac{d_j}{6}(x - x_j)^3, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, j = \overline{1, n}, \text{ где } a_j, b_j, c_j, d_j \text{ —}$$

коэффициенты, подлежащие определению.

Вычислим производные сплайна $S_{p_j}(x)$:

$$S'_{p_j}(x) = b_j + c_j(x - x_j) + \frac{d_j}{2}(x - x_j)^2; \quad S''_{p_j}(x) = c_j + d_j(x - x_j); \quad S'''_{p_j}(x) = d_j \text{ Следовательно, имеем:}$$

$$a_j = S_{p_j}(x_j); \quad b_j = S'_{p_j}(x_j); \quad c_j = S''_{p_j}(x_j); \quad d_j = S'''_{p_j}(x_j).$$

Из условия интерполирования $S_p(x_j) = f(x_j), j = \overline{0, n}$ получаем, что $a_j = f(x_j), j = \overline{0, n}$. Далее требование непрерывности функции $S_{p_{j-1}}(x_{j-1}) = S_{p_j}(x_{j-1}), j = 2, 3, \dots, n$.

Из условия непрерывности сплайна на всем отрезке $[\underline{x}, \bar{x}]$ интерполирования, получаем при $j = 1, \dots, n$ уравнения

$$a_{j-1} = a_j + b_j(x_{j-1} - x_j) + \frac{c_j}{2}(x_{j-1} - x_j)^2 + \frac{d_j}{6}(x_{j-1} - x_j)^3.$$

Перепишем эти уравнения с учетом обозначения $h_j = x_j - x_{j-1}$:

$$h_j b_j - \frac{h_j^2}{2} c_j + \frac{h_j^3}{6} d_j = y(j) - y(j-1), \quad (2.1)$$

Условия непрерывности первой производной сплайна $S_p(x)$:

$$S'_{p_{j-1}}(x_j) = S'_{p_j}(x_j); j = 2, 3, \dots, n$$

приводят к уравнениям

$$c_j h_j - \frac{d_j}{2} h_j^2 = b_j - b_{j-1}; j = 2, 3, \dots, n. \quad (2.2)$$

Из условия непрерывности второй производной получаем уравнения

$$d_j h_j = c_j - c_{j-1}; j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.3)$$

Объединяя (2.1) ÷ (2.3), получаем систему $3n-2$ уравнений относительно $3n$ неизвестных $b_j, c_j, d_j, j = 1, 2, \dots, n$. Два недостающих уравнения получают, задавая граничные условия для $S_p(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f''(\underline{x}) = f''(\bar{x}) = 0$. Отсюда получаем $S''_{p_1}(x_1) = 0, S''_{p_n}(x_n) = 0$, т.е. $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_n = 0$.

Таким образом, приходим после некоторых преобразований к замкнутой системе для определения коэффициентов кубического сплайна:

$$h_j c_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})c_j + h_{j+1}c_{j+1} = 6\left(\frac{y(j+1) - y(j)}{h_{j+1}} + \frac{y(j) - y(j-1)}{h_j}\right), \quad (2.4)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1, c_1 = c_n = 0.$$

В силу диагонального преобладания система (2.4) имеет единственное решение. Так как матрица системы трехдиагональная, решение легко найти методом прогонки. По найденным коэффициентам c_j определяются коэффициенты b_j, d_j с помощью явных формул

$$d_j = \frac{c_j - c_{j-1}}{h_j}, b_j = \frac{h_j}{2} c_j - \frac{h_j^2}{6} d_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что можно рассматривать и другие граничные условия.

Наилучшее приближение функции, заданной таблично (аппроксимация)

Пусть значения табличной функции $f(x_j) = y(j)$ и приближающей функции $\varphi_i(x), i = 0, 1, \dots, m$ известны в точках $x_j \in [\underline{x}, \bar{x}], j = 0, 1, \dots, n$. Если $n > m$, то задача интерполирования становится неопределенной. В этом случае имеем задачу о наилучшем приближении. Введем обобщенный многочлен

$$\varphi(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_m \varphi_m(x)$$

и будем рассматривать его значения в узлах x_j , т.е.

$$\varphi(x_j) = c_0 \varphi_0(x_j) + c_1 \varphi_1(x_j) + \dots + c_m \varphi_m(x_j), j = 0, 1, \dots, n.$$

Образует разности $r_j = \varphi(x_j) - y(j), j = 0, 1, \dots, n$, характеризующие отклонение в узлах x_j экспериментальных данных $y(j)$ от расчетного значения, полученного с помощью обобщенного многочлена $\varphi(x_j)$. Для вектора погрешностей $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)^T$ можно ввести ту или иную норму, например

$$\|r\|_E = \left(\sum_{j=0}^n r_j^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^n (\varphi(x_j) - y(j))^2\right)^{1/2}$$

или

$$\|r\|_{\infty} = \max_{0 \leq j \leq n} |r_j| = \max_{0 \leq j \leq n} |\varphi(x_j) - y(j)|.$$

Задача о наилучшем приближении экспериментальных данных $y(j)$ состоит в нахождении коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_m , лимитирующих норму вектора r . В зависимости от выбора нормы получим решение задачи. Так норма $\|r\|_E$ соответствует задаче о наилучшем среднеквадратичном приближении, а норма $\|r\|_C$ — задаче о наилучшем равномерном приближении экспериментальных данных.

Пример. Построим наилучшее среднеквадратичное приближение для случая $m = 1, n = 2$, когда задана $f(x_j) = y(j), j = 0, 1, 2$. Обозначим $h_0 = x_1 - x_0, h_1 = x_2 - x_1$ и будем искать обобщенный многочлен $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = c_0 + c_1(x - x_1)$.

Тогда для $r(x) = \varphi(x) - y$ получим, что $\|r\|^2 = \Phi(c_0, c_1)$, где

$$\Phi(c_0, c_1) = (c_0 - c_1 h_0 - y(0))^2 + (c_0 - y(1))^2 + (c_0 + c_1 h_1 - y(2))^2.$$

Коэффициенты c_0, c_1 определяются из условия

$$\min_{c_0, c_1} \Phi(c_0, c_1). \quad (2.5)$$

Метод определения коэффициентов обобщенного многочлена из условия (2.5) называют методом наименьших квадратов.

Точку минимума $\Phi(c_0, c_1)$ найдем из условия (в данном случае необходимого и достаточного)

$$\Phi'_{c_0} = \Phi'_{c_1} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0,$$

которое приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$3c_0 + (h_1 - h_0)c_1 = y(0) + y(1) + y(2),$$

$$(h_1 - h_0)c_0 + (h_0^2 + h_1^2)c_1 = h_1 y(2) - h_0 y(0).$$

$$c_0 = \alpha_0 y(0) + (1 - \alpha_0 - \alpha_2) y(1) + \alpha_2 y(2),$$

Отсюда получаем:

$$c_1 = \beta \frac{y(2) - y(1)}{h_1} + (1 - \beta) \frac{y(1) - y(0)}{h_0}, \quad (2.6)$$

где $\alpha_0 = \frac{h_1(h_0 + h_1)}{2(h_0^2 + h_1^2 + h_1 h_0)}, \alpha_2 = \frac{h_0(h_0 + h_1)}{2(h_0^2 + h_1^2 + h_1 h_0)}, \beta = \frac{h_1(2h_1 + h_0)}{2(h_0^2 + h_1^2 + h_1 h_0)}$. Если $h_0 = h_1 = h$, то

$$c_0 = \frac{1}{3}(y(0) + y(1) + y(2)), c_1 = \frac{y(2) - y(0)}{2h}. \quad (2.7)$$

Погрешность полученного приближения на равномерной сетке имеет второй порядок по h , т. е. $\|y - \varphi\|_r = \frac{h^2}{\sqrt{6}} |y''(\xi)|$, где $\xi \in (x_0, x_2)$.

Сглаживание сеточных функций методом «скользящего среднего»

Пусть имеется таблица значений $f(x_j) = y(j), j = \overline{0, n}$, полученных путем измерения некоторой физической величины или с помощью численных расчетов. Может оказаться, что $f(x)$ сильно меняется на отдельных участках. В этом случае иногда целесообразно применить процедуру сглаживания, т. е. приближенно заменить $f(x)$ другой, более гладкой функцией $\varphi(x)$.

Для построения сглаженных функций можно воспользоваться среднеквадратичными приближениями. Согласно (2.7) получаем, что многочлен $\varphi^{(j)}(x)$ наилучшего среднеквадратичного приближения, построенный по значениям $y(j-1), y(j), y(j+1)$, имеет вид:

$$\varphi^{(j)}(x) = \frac{y(j-1) + y(j) + y(j+1)}{3} + \frac{y(j+1) - y(j-1)}{2h}(x - x_j),$$

причём

$$\varphi^{(j)}(x_j) = \frac{y(j-1) + y(j) + y(j+1)}{3}, j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.8)$$

Доопределим $\varphi^{(0)}(x_0) = y(0)$, $\varphi^{(n)}(x_n) = y(n)$ и обозначим $\varphi_j = \varphi^{(j)}(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Процедура сглаживания по формулам (2.8) состоит в замене сеточной функции $\{f(x_j)\}_{j=0}^n = y(j), j = \overline{0, n}$ другой более гладкой сеточной функцией $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, определенной согласно (2.8).

В приведенном примере на рисунке 2.2 функция $f(x_j)$ имеет две особенности: разрыв при $j = 3$ и выброс при $j = 8$. Сглаживание приводит к размыванию разрыва и выброса.

В рассмотренном случае сглаживание свелось к осреднению функции $f(x)$ по трем соседним точкам. Можно проводить осреднение по большему числу точек, например, по пяти точкам.

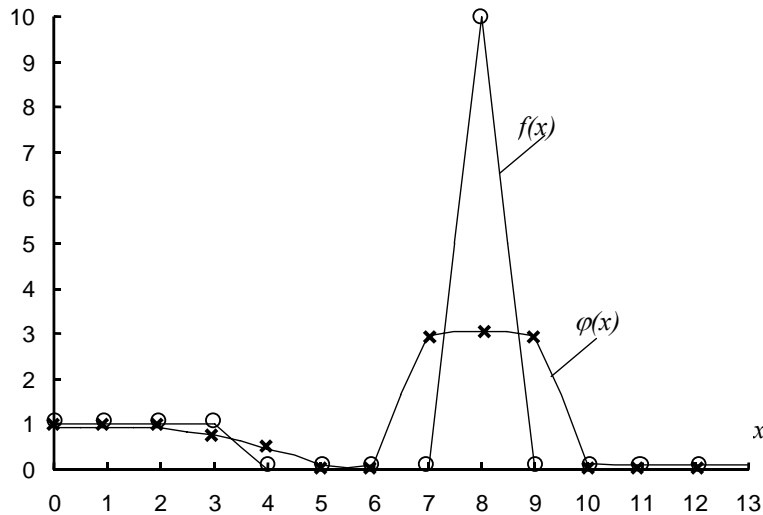


Рис. 2.2 – Пример сглаживания сеточной функции $\{f(x_j)\}_{j=0}^{12}$ $\{\varphi_j\}_{j=0}^{12}$ — сглаженная функция

Сглаживание методом четвертых разностей

Пусть известны $x(j)$, $y_{cp}(j)$, $j = \overline{1, n}$. Аппроксимируем первые 5 ординат $y_{cp}(1) \div y_{cp}(5)$ параболой $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, коэффициенты a_0, a_2, a_1 определим методом наибольших квадратов. Далее вычислим величину "невязки" $\delta y(3)$ средней ординаты $y_{cp}(3)$ и параболы $y(x_3)$. Оказывается, что $\delta y(3) \approx \frac{1}{12} \Delta^4 y_{cp}(3)$, где $\Delta^4 y_{cp}(3)$ – четвертая центральная разность $y_{cp}(3)$ в точке $x(3)$. Следовательно, величину $y(x_3)$ сглаженной функции можно найти по формуле:

$$y(x_3) \approx y_{cp}(3) - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{cp}(3).$$

Затем применим рассмотренную процедуру к ординатам $y_{cp}(2) \div y_{cp}(6)$ и находим $y(x_4) \approx y_{cp}(4) - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{cp}(4)$, и т.д. В общем случае имеем:

$$y(j) \approx y_{cp}(j) - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{cp}(j), j = 3, 4, \dots, n-2,$$

где четвертая центральная разность $\Delta^4 y_{cp}(j)$ вычисляется по формуле

$$\Delta^4 y_{cp}(j) = y_{cp}(j-2) - 4y_{cp}(j-1) + 6y_{cp}(j) - 4y_{cp}(j+1) + y_{cp}(j+2).$$

Значения $y_{cp}(1), y_{cp}(2), y_{cp}(n-1), y_{cp}(n)$ не могут быть сглажены по формуле (5.1) и для их обработки следует применять другие зависимости.

Метод наименьших квадратов и регуляризация

Решение многомерных задач часто сводится к решению следующих задач. В некоторой области S -мерного пространства X заданы точки x_1, x_2, \dots, x_n и значение функции f в этих точках. Требуется получить приближение к значению функции $f(x)$. Рассмотрим метод наименьших квадратов.

Пусть приближающая функция ищется в виде

$$g(x) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x), \quad (2.9)$$

где $m \ll n$.

Коэффициенты c_i будем определять из условия

$$\min_{c_1, c_2, \dots, c_m} \Phi(c_1, c_2, \dots, c_m),$$

$$\text{где } \Phi(g) = \Phi(c) = \sum_{j=1}^n P_j (g(x_j) - y(j))^2 = \sum_{j=1}^n P_j \left(\sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x_j) - y(j) \right)^2.$$

В основе метода наименьших квадратов лежит следующее соображение. Малость величины $\Phi(c)$ обеспечивает близость функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ в точках x_j . При $m \ll n$ функция $\varphi(x)$ содержит относительно мало параметров и поэтому у нее меньше возможностей отличаться от $f(x)$ вне узлов по сравнению со случаем $m = n$.

Числа $P_j > 0$, называемые весами, подбирают в зависимости от плотности распределения точек x_j . Если значения $f(x_j) = y(j)$ содержат случайную ошибку, то их выбирают также в зависимости от дисперсии ошибок измеряемых значений. Там, где точки x_j распределены плотнее, числа P_j берутся меньше; значениям $f(x_j) = y(j)$ с большей дисперсией ошибки ставят в соответствии также меньшие значения P_j . Для конкретных задач принципы выбора P_j и m вырабатываются с учетом специфических свойств задач на основе статистических критериев и численного эксперимента.

Используя необходимое (и для данного случая достаточное) условие минимума функции $\Phi(c)$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения c_i :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_k} &= \sum_{i=1}^m d_{ki} c_i - d_k = 0, k = \overline{1, m}, \\ d_{ki} &= d_{ik} = \sum_{j=1}^n P_j \varphi_k(x_j) \varphi_i(x_j), \\ d_k &= \sum_{j=1}^n P_j \varphi_k(x_j) y(j). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Числа c_i можно находить непосредственно решая указанную систему уравнений (2.10) или минимизируя каким-либо методом функцию $\Phi(c)$.

В основе метода регуляризации непосредственно лежат соображения о сглаживании аппроксимирующей функции. Наиболее распространенной формой метода регуляризации является следующая. Приближение отыскивается в виде (2.9), а коэффициенты c_i выбираются из условия минимума выражения:

$$\Phi(\alpha, g) = \Phi(g) + \alpha \psi(g), \alpha > 0. \quad (2.11)$$

Функционал $\psi(g)$ подбирается из следующего условия: если значение этого функционала невелико, то функция φ обладает определенной гладкостью. Например, $\psi(\varphi)$ может быть некоторым приближением к интегралу $\int_X |\text{grad}(g(x))|^2 dx$. В приложениях распространен случай $m = n$. Пусть минимум $\Phi(\alpha, g)$, достигается при некоторых $c_1^\alpha, c_2^\alpha, \dots, c_n^\alpha$ и

$$g^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n c_i^\alpha \varphi_i(x).$$

Рассмотрим крайние случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. Имеем равенство

$$\Phi(0, g) = \sum_{j=1}^n P_j \left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) - y(j) \right)^2. \quad (2.12)$$

Если $\det \|\varphi_i(x_j)\| \neq 0$, система $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) = y(j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ имеет решение, и на ее решении правая часть равенства (2.12) обращается в нуль. Тогда $g^0(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом с узлами интерполяции x_j . При больших α в функционале (2.11) определяющим является второе слагаемое, нижняя грань которого достигается на гладкой функции. Следовательно, есть все основания утверждать, что при промежуточных значениях α функции $g^\alpha(x)$ будут гладкими и в то же время не очень сильно отличающимися от приближаемой функции в заданных узлах.