

Понятие «модели». Классификация математических моделей

В общем случае модель является представлением объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования. Модель какого-либо объекта может быть или точной копией этого объекта, или отображать некоторые характерные свойства объекта в абстрактной форме. Модель служит обычно средством, помогающим нам в объяснении, понимании или совершенствовании системы. Можно указать по крайней мере пять узаконенных и ставших привычными случаев применения моделей в качестве:

- 1) средства осмысления действительности;
- 2) средства общения;
- 3) средства обучения и тренажа;
- 4) инструмента прогнозирования;
- 5) средства постановки экспериментов.

Иными словами, модель может служить для достижения одной из двух основных целей: либо описательной, если модель служит для объяснения и (или) лучшего понимания объекта; либо предписывающей, когда модель позволяет предсказать и (или) воспроизвести характеристики объекта, определяющие его поведение. Модель предписывающего типа обычно является и описательной, но не наоборот.

Прежде чем начать разработку модели, необходимо понять, что собой представляют структурные элементы, из которых она строится. В самом общем виде структуру модели математически можно представить в виде

$$E = \Phi(y, x, a, \xi),$$

где E – результат действия системы; $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – вектор входных переменных, которыми мы можем управлять; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор переменных состояния (когда они характеризуют состояние или условия, имеющие место в объекте (системе)) или выходных переменных (когда речь идет о выходах системы); $a = (a_1, a_2, \dots, a_l)$ – вектор внутренних параметров объекта (системы); $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ – вектор неопределенных параметров (часть входных переменных и внутренних параметров системы, значения которых мы не знаем точно) и возмущающих воздействий.

Компонентами векторов x и y являются расходы и составы потоков веществ, концентрации веществ, температура, давление в потоках, и т.п., компонентами вектора a – коэффициенты и параметры, характеризующие свойства перерабатываемых веществ, физико-химические процессы в системе (константы скоростей химических реакций, коэффициенты тепло- и массообмена, диффузии и т.п.), геометрические размеры и конструктивные особенности технологического оборудования.

В зависимости от масштаба технологической системы и наших предположений о его свойствах математические модели (ММ) принимают конкретный вид. Можно говорить о ММ технологической машины или аппарата, технологического процесса, производства, предприятия и даже целой отрасли. Эти ММ отличаются одна от другой полнотой учета и глубиной описания различных процессов в системе, а также размерностями векторов y, x, a, ξ и вектор-функций Φ их связи $E = \Phi(y, x, a, \xi)$. Если, например, ММ аппарата содержит чаще всего не более 10-15 уравнений, то в модель производства, предприятия и тем более отрасли может входить несколько десятков или сотен уравнений.

Функциональные зависимости Φ описывают поведение переменных и внутренних параметров в пределах компонента системы или выражают соотношения между компонентами системы. Эти соотношения, или операционные характеристики, по своей природе являются либо детерминированными, либо стохастическими. Детерминированные соотношения – это тождества или определения, которые устанавливают зависимость между определенными переменными или параметрами системы в тех случаях, когда процесс на выходе системы однозначно определяется заданной информацией на входе. В отличие от этого стохастические соотношения представляют собой такие зависимости, которые при заданной входной информации дают

на выходе системы неопределенный результат. Оба типа соотношений обычно выражаются математическими уравнениями, которые устанавливают зависимость между переменными состояниями (выходными) системы y , ее входными переменными x , внутренними параметрами системы a и возмущающими воздействиями (неопределенными параметрами) ξ . Обычно эти соотношения строятся на основе гипотез или выводятся с помощью статистического или математического анализа.

При построении моделей технологических объектов обычно вводят *ограничения*, представляющие собой устанавливаемые пределы изменения значений переменных или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных ресурсов (энергии, материалов, запасов сырья, времени и т.п.). Они могут вводиться либо разработчиком (искусственные ограничения), либо самой системой вследствие присущих ей свойств (естественные ограничения).

Целевая функция или критерий E – это точное отображение целей или задач системы и необходимых правил оценки их выполнения. Можно указать два типа целей: сохранение и приобретение. Цели сохранения связаны с сохранением или поддержанием каких-либо ресурсов (временных, энергетических, творческих и т.д.) или состояний (безопасности, комфорта, качественных показателей выпускаемой продукции и т.д.). Цели приобретения связаны с приобретением новых ресурсов (прибыли, более высокого качества, заказчиков и т.п.) или достижением определенных состояний, к которым стремится предприятие или руководитель (заоевание части рынка, повышение уровня занятости, экологической безопасности и т.п.). Целевая функция (критерий) обычно является органической составной частью модели, и весь процесс манипулирования с моделью направлен на удовлетворение или улучшение заданного критерия.

Модели можно классифицировать различными способами, хотя ни один из них не является полностью удовлетворительным. Укажем некоторые типовые группы моделей:

- 1) натурные, аналоговые, символические;
- 2) экспериментальные (регрессионные) и аналитические;
- 3) статические и динамические;
- 4) детерминированные и стохастические;
- 5) дискретные и непрерывные.

Различие ММ обуславливается их назначением: исследование эффективности режимов функционирования технологических объектов; оптимизация установившихся (статических) и переходных (динамических) режимов их работы; оптимальное проектирование технологических объектов и управление ими. Структура и вид уравнений ММ зависят от свойств объекта.

Поведение технологического объекта с сосредоточенными координатами y, x в статике и неизменными во времени t свойствами (стационарный объект) описывается уравнениями ММ вида

$$F[y, x, a, \xi] = 0 \text{ или } y = f(x, a, \xi).$$

ММ статики нестационарного объекта с сосредоточенными координатами (квазистатическая модель) представляет собой систему уравнений вида:

$$F[y, x, a(t), \xi] \approx 0, \frac{da}{dt} = f_1(y, a, \xi).$$

Поведение технологического объекта с сосредоточенными координатами y, x в динамике и неизменными во времени t свойствами описывается уравнениями ММ вида

$$F\left[\frac{dy}{dt}, y(t), x(t), a, \xi\right] = 0 \text{ или } \frac{dy}{dt} = f(y(t), x(t), a, \xi).$$

ММ динамики нестационарного объекта с сосредоточенными координатами представляет собой систему уравнений вида

$$F\left[\frac{dy}{dt}, x(t), a(t), \xi\right] \approx 0, \frac{da}{dt} = f_1(y(t), a, \xi).$$

Если координаты объекта x, y распределены по пространственной переменной l (длина, радиус, высота) и его свойства неизменны во времени t , то мы имеем дело со стационарными ММ статики или динамики технологического объекта с распределенными координатами, которые имеют вид, соответственно:

$$F \left[\frac{dy}{dl}, y(l), x(l), a(l), \xi \right] = 0, \quad F \left[\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial l}, y(t, l), x(l), a(l), \xi \right] = 0.$$

По структуре F ММ технологических объектов разделяются на линейные и нелинейные. Решение $y(x, a)$ системы уравнений ММ, линейной по y , удовлетворяет следующим условиям (принципу суперпозиции):

- 1) аддитивности $y(x_1 + x_2, a) = y(x_1, a) + y(x_2, a)$;
- 2) однородности $y(c \times x, a) = c \times y(x, a)$;

где x_1 и x_2 - произвольные функции t, l или некоторые числа; c - любое вещественное число.

Решение $y(x, a)$ называется линейным по a , если

$$y(x, a_1 + a_2) = y(x, a_1) + y(x, a_2); \text{ и } y(x, c \times a) = c \times y(x, a),$$

где a_1, a_2 - произвольные параметры ММ.

Если для некоторой ММ не выполняется хотя бы одно из условий принципа суперпозиции, то она относится к классу нелинейных.

Математические модели технологических объектов химической, пищевой и микробиологической промышленности чаще всего описываются *нелинейными* уравнениями.

Выше мы определили компьютерное моделирование как процесс создания модели реального технологического объекта и проведения с этой моделью вычислительных экспериментов с целью осмысления поведения объекта, оптимизации его режимов или оценки различных стратегий управления этим объектом. Согласно этому определению, модель должна быть связана с функционированием объекта, ориентирована на решение поставленной задачи (целеобусловлена) и построена так, чтобы служить подспорьем тем, кто проектирует объект или управляет режимами его функционирования. Функционирование объекта представляет собой совокупность координированных действий, необходимых для достижения заданной цели или решения определенной задачи. С этой точки зрения технологическим объектам, которыми мы интересуемся, свойственна целенаправленность. Это обстоятельство требует от нас при моделировании технологического объекта обратить самое пристальное внимание на цели и задачи, которые должен решать данный технологический объект.

Сформулируем теперь конкретные критерии, которым должна удовлетворять «хорошая» модель. Такая модель должна быть: 1) простой и понятной пользователю; 2) целенаправленной; 3) надежной в смысле гарантии от абсурдных ответов; 4) удобной в управлении и обращении; 5) полной с точки зрения возможностей решения поставленных задач; 6) адаптивной, т.е. позволяющей легко переходить к другим модификациям или обновлять данные; 7) допускающей постепенные изменения в том смысле, что будучи вначале простой, она может во взаимодействии с пользователем становится все более сложной и точной.

Необходимость большинства этих критериев совершенно очевидна, но они будут рассмотрены более полно в последующих разделах настоящего пособия, посвященных вопросам организации и руководства работами по компьютерному моделированию.